CH IV — Application aux Fluides Parfaits Incompressibles

Nous allons appliquer les équations fondamentales de la dynamique au cas de fluides parfaits (non visqueux) et incompressibles.

1 - Equation de *Bernoulli*

Partons de l'équation fondamentale de la dynamique et considérons l'écoulement stationnaire d'un fluide parfait incompressible :

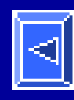
$$\rho\left(\frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + (\vec{v}\,\vec{\nabla})\,\vec{v}\right) = -\vec{\nabla}p + \cancel{\mu}\,\Delta\vec{v} + \rho\,\vec{g} \quad \Rightarrow \quad \rho(\vec{v}\,\vec{\nabla})\,\vec{v} = -\vec{\nabla}p + \rho\,\vec{g}$$

écoulement stationnaire (terme $\frac{\partial \vec{v}}{\partial t}$ barré)

fluide parfait donc non visqueux

Si $\vec{g} = -g\vec{e}_z$, alors on peut écrire : $\rho\,\vec{g} = -\vec{\nabla}(\rho g z)$

Par ailleurs, on vérifie toujours l'égalité vectorielle suivante : $(\vec{v}\vec{\nabla})\vec{v} = \frac{1}{2}\vec{\nabla}(\vec{v}\vec{v}) - \vec{v} \wedge (\vec{\nabla} \wedge \vec{v})$



Par conséquent :

$$\rho(\vec{v}\,\vec{\nabla})\,\vec{v} = -\vec{\nabla}p + \rho\,\vec{g} \quad \Rightarrow \quad \tfrac{1}{2}\,\rho\vec{\nabla}(\vec{v}\vec{v}) - \rho\vec{v}\wedge(\vec{\nabla}\wedge\vec{v}) = -\vec{\nabla}p - \vec{\nabla}(\rho g z)$$

$$\Rightarrow \quad \vec{\nabla}(\tfrac{1}{2}\,\rho v^2) + \vec{\nabla}p + \vec{\nabla}(\rho g z) = \rho\vec{v}\wedge(\vec{\nabla}\wedge\vec{v})$$

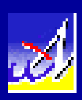
$$\Rightarrow \quad \vec{\nabla}(\tfrac{1}{2}\,\rho v^2 + p + \rho g z) = \rho\vec{v}\wedge\underbrace{(\vec{\nabla}\wedge\vec{v})}_{2\vec{\Omega}}$$

$$\Rightarrow \quad \vec{\nabla}(\tfrac{1}{2}\,\rho v^2 + p + \rho g z) = 2\rho\,\vec{v}\wedge\vec{\Omega}$$

Si l'écoulement est irrotationnel : $\vec{\Omega} = \vec{0}$ et par conséquent :

$$\vec{\nabla}(\tfrac{1}{2}\,\rho v^2 + p + \rho g z) = \vec{0}$$

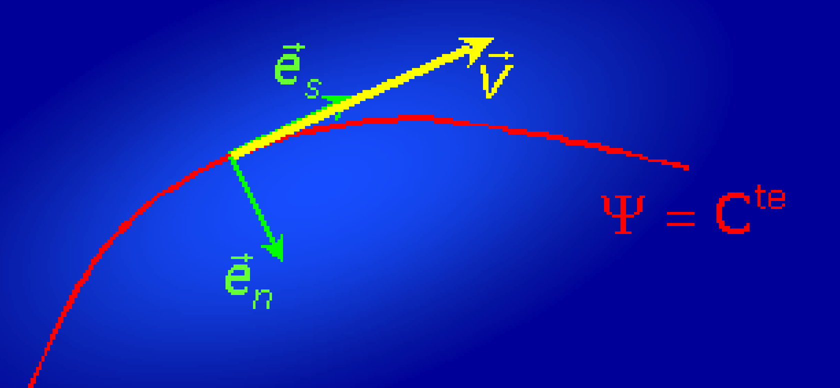
Donc : $\tfrac{1}{2}\,\rho v^2 + p + \rho g z = C^{te}$ **en tout point** de l'écoulement si celui-ci est **irrotationnel**.



Si l'écoulement n'est pas irrotationnel :

$$\rho(\vec{v}\,\vec{\nabla})\vec{v} = -\vec{\nabla}p - \vec{\nabla}(\rho g z) = -\vec{\nabla}(\underbrace{p + \rho g z}) = -\vec{\nabla}p^*$$

p^* : *pression motrice*



Le long d'une ligne de courant, dans le repère de *Frenet* le vecteur vitesse s'exprime : $\vec{v} = v\vec{e}_s$

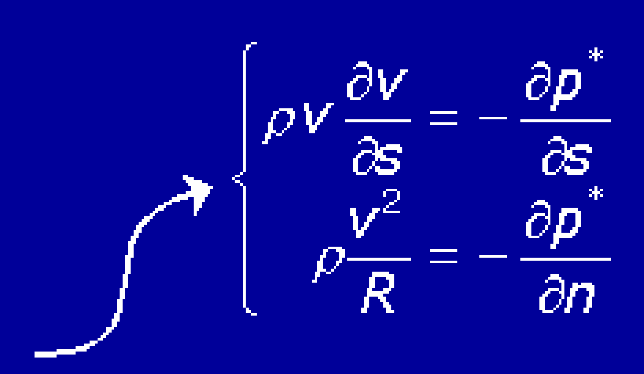
Dans ce même repère, on a :

$$\vec{v}\,\vec{\nabla} = (v\vec{e}_s).(\frac{\partial}{\partial s}\vec{e}_s) = v\frac{\partial}{\partial s}$$

D'où : $\rho v \underbrace{\frac{\partial}{\partial s}(v\vec{e}_s)} = -\frac{\partial p^*}{\partial s}\vec{e}_s - \frac{\partial p^*}{\partial n}\vec{e}_n$

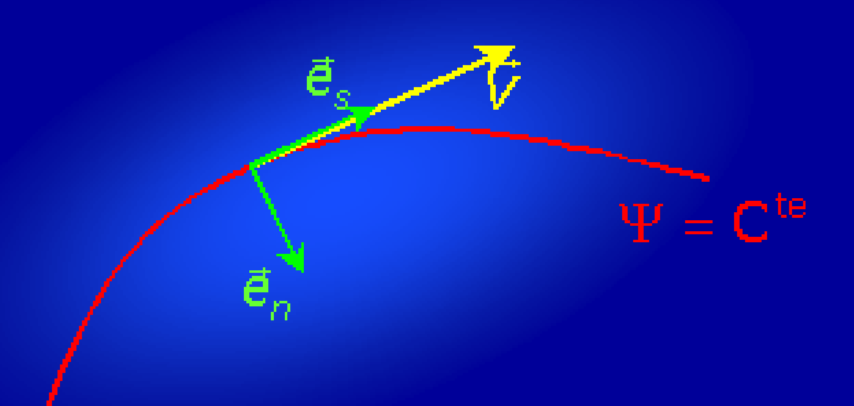
$$\frac{\partial v}{\partial s}\vec{e}_s + v\frac{\partial \vec{e}_s}{\partial s} = \frac{\partial v}{\partial s}\vec{e}_s + v\frac{\vec{e}_n}{R}$$

Soit : $\rho v\frac{\partial v}{\partial s}\vec{e}_s + \rho\frac{v^2}{R}\vec{e}_n = -\frac{\partial p^*}{\partial s}\vec{e}_s - \frac{\partial p^*}{\partial n}\vec{e}_n$



$$\begin{cases} \rho v\frac{\partial v}{\partial s} = -\frac{\partial p^*}{\partial s} \\ \rho\frac{v^2}{R} = -\frac{\partial p^*}{\partial n} \end{cases}$$

$$\begin{cases} \rho v \dfrac{\partial v}{\partial s} = -\dfrac{\partial p^*}{\partial s} & \text{(i)} \\ \rho \dfrac{v^2}{R} = -\dfrac{\partial p^*}{\partial n} & \text{(ii)} \end{cases}$$



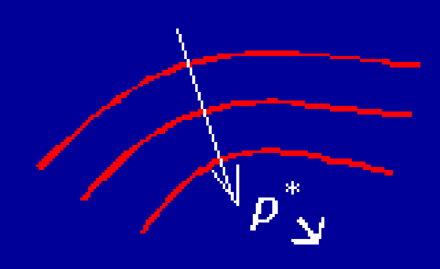
(i) $$\rho v \frac{\partial v}{\partial s} = \rho \tfrac{1}{2} \frac{\partial v^2}{\partial s} = \frac{\partial}{\partial s}\left(\tfrac{1}{2}\rho v^2\right) \Rightarrow \frac{\partial}{\partial s}\left(\tfrac{1}{2}\rho v^2\right) = -\frac{\partial p^*}{\partial s}$$

$$\Rightarrow \frac{\partial}{\partial s}\left(\tfrac{1}{2}\rho v^2 + p^*\right) = 0 \Rightarrow \frac{\partial}{\partial s}\left(\tfrac{1}{2}\rho v^2 + p + \rho g z\right) = 0$$

$$\Rightarrow \boxed{p + \rho g z + \tfrac{1}{2}\rho v^2 = C^{te}}$$ le long d'une même ligne de courant.

équation de Bernoulli

(ii) $$\rho \frac{v^2}{R} = -\frac{\partial p^*}{\partial n} \Rightarrow \frac{\partial p^*}{\partial n} < 0$$



La pression motrice diminue quand on se rapproche du centre de courbure.

Si les lignes de courants sont rectilignes et parallèles, alors la pression motrice reste constante dans la direction perpendiculaire.

2 - Interprétation de l'équation de *Bernoulli*

a) Interprétation en énergie

Multiplions tous les termes de l'équation de *Bernoulli* par un volume V :

$$p.V + \rho g z.V + \tfrac{1}{2}\rho v^2.V = C^{te} \times V$$

$p.V$ $\Rightarrow$ travail des forces de pression : ***énergie potentielle*** due aux forces de pression.

$\rho g z.V = mgz$ $\Rightarrow$ ***énergie potentielle*** due aux forces de pesanteur.

$\tfrac{1}{2}\rho v^2.V = \tfrac{1}{2}mv^2$ $\Rightarrow$ ***énergie cinétique.***

$C^{te} \times V = E_m$ $\Rightarrow$ énergie totale : ***énergie mécanique.***

Par conséquent : $p + \rho g z + \tfrac{1}{2}\rho v^2 = \dfrac{E_m}{V}$ correspond à une ***énergie mécanique par unité de volume*** (si V=1).

L'énergie mécanique reste alors constante le long d'une ligne de courant (il n'y a pas de dissipation d'énergie).

b) Interprétation en pression

$$p + \rho g z + \frac{1}{2}\rho v^2 = C^{te}$$

p $\Rightarrow$ ***pression statique***
(elle existe même s'il n'y a pas de mouvement)

$p + \rho g z = p^*$ $\Rightarrow$ ***pression motrice***
(elle génère le mouvement)

$\frac{1}{2}\rho v^2$ $\Rightarrow$ ***pression cinétique***
(elle résulte du mouvement)

$p + \rho g z + \frac{1}{2}\rho v^2 = P_t$ $\Rightarrow$ ***pression totale (ou charge)***

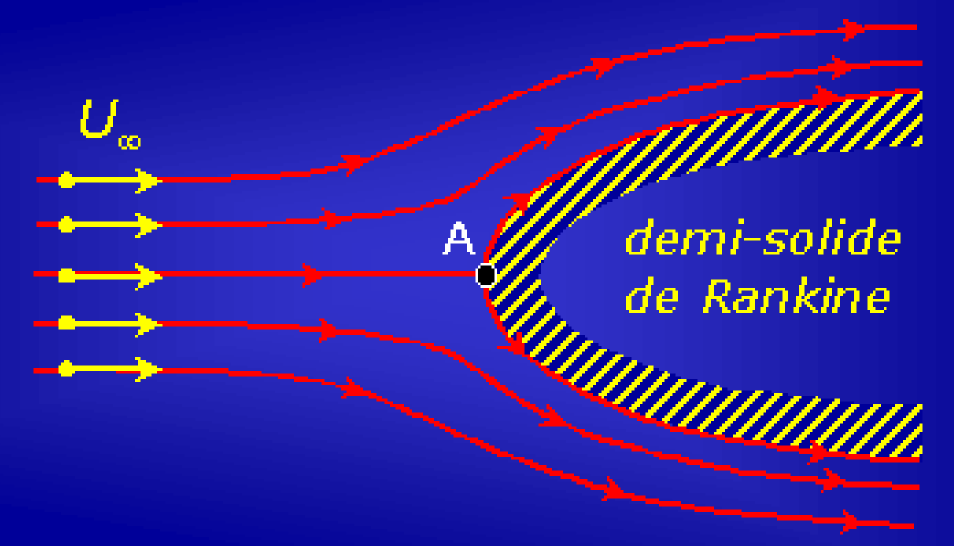
L'équation de *Bernoulli* montre alors que la charge reste constante le long d'une même ligne de courant
(→ pas de perte de charge dans l'écoulement d'un fluide parfait).

3 - Applications

a) Sondes de pression - Tube de *Pitot*

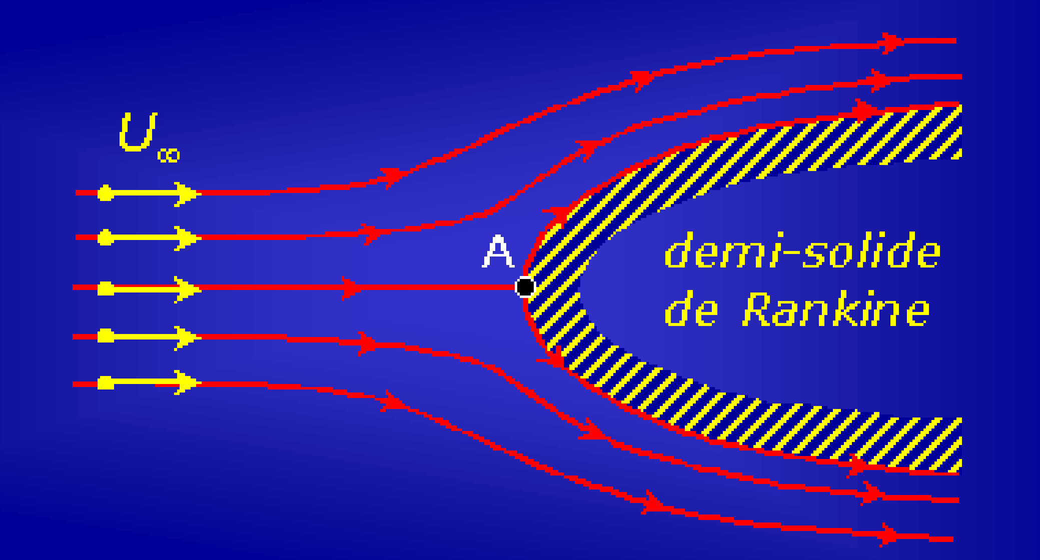
L'étude de la cinématique des écoulements a permis de montrer que des obstacles pouvaient générer un ou plusieurs point(s) d'arrêt.

Par exemple, la superposition d'un **écoulement uniforme** avec une **source** peut modéliser l'écoulement autour d'un objet appelé demi-solide de Rankine.



Ainsi, en amont de cet objet l'écoulement peut être considéré uniforme, de vitesse U_∞.

Un point d'arrêt A est généré sur le front d'attaque de l'objet.



Le long d'une même ligne de courant on vérifie :

$$p + \rho g z + \tfrac{1}{2}\rho v^2 = C^{te}$$

Considérons la ligne de courant passant par le point d'arrêt et appliquons *Bernoulli* entre le point A et un point situé loin en amont :

$$p_\infty + \rho g z_\infty + \tfrac{1}{2}\rho v_\infty^2 = p_A + \rho g z_A + \tfrac{1}{2}\rho v_A^2$$

$v_\infty^2 \rightarrow U_\infty^2 \qquad v_A^2 \rightarrow 0$

$$\Rightarrow \quad p_\infty + \rho g z_\infty + \tfrac{1}{2}\rho U_\infty^2 = p_A + \rho g z_A$$

Et si l'écoulement a lieu dans un plan tel que $z = C^{te}$, alors :

$$p_\infty + \tfrac{1}{2}\rho U_\infty^2 = p_A$$

la pression p_A est ainsi appelée *pression de stagnation*.

En O et O′, l'écoulement est supposé uniforme, de vitesse *U*.

Les lignes de courant étant supposées rectilignes et parallèles, la pression est la même en O et O′ ⇒ $p_O = p_{O'}$

Pour les mêmes raisons, la pression est la même en B et B′ ⇒ $p_B = p_{B'}$

Le fluide étant immobile à l'intérieur de la sonde, la pression y est uniforme et égale à la pression en B.

⇒ le premier manomètre donne la pression en A
⇒ le second manomètre donne la pression en B

$$p_A - p_B = \rho g \Delta h$$

En appliquant *Bernoulli* entre O et A, on a : $p_O + \frac{1}{2}\rho U^2 = p_A$

Puis entre O′ et B′ : $p_{O'} + \frac{1}{2}\rho U^2 = p_{B'} + \frac{1}{2}\rho v_{B'}^2$

On peut alors faire l'hypothèse que l'écoulement est redevenu uniforme loin après le front de l'objet : $v_{B'} = U$

D'où : $p_{O'} = p_{B'}$ Or, on a vu que : $p_{O'} = p_O$ et $p_{B'} = p_B$

$\Rightarrow p_O = p_B$

Par conséquent : $p_B + \frac{1}{2}\rho U^2 = p_A$

$$p_B + \frac{1}{2}\rho U^2 = p_A$$

$$\Rightarrow \quad \frac{1}{2}\rho U^2 = p_A - p_B = \rho g \Delta h$$

$$\Rightarrow \quad U = \sqrt{2g\Delta h}$$

différents types de sondes de ***Prandtl*** (tubes de Pitot-double)

b) Phénomène de *Venturi* - Mesure de débit

Considérons une conduite le long de laquelle a été placé un rétrécissement :

On dispose de 3 sondes de pression (manomètres) placées :

- ¤ en amont du rétrécissement $\Rightarrow p_A$
- ¤ au niveau du rétrécissement $\Rightarrow p_B$
- ¤ en aval du rétrécissement $\Rightarrow p_C$ (*sonde facultative*)

En dessous chaque prises de pression, les lignes de courant peuvent être considérées rectilignes et parallèles : dans la direction perpendiculaire (suivant *z*) les lois de l'hydrostatique s'appliquent à la pression :

$$\begin{cases} p_A = p_{A'} + \rho g z_{A'} \\ p_B = p_{B'} + \rho g z_{B'} \\ p_C = p_{C'} + \rho g z_{C'} \end{cases} \quad \text{où} \quad p_{A'} = p_{B'} = p_{C'} = p_{atm}$$

Appliquons *Bernoulli* sur la ligne de courant passant par A, B et C :

$$p_A + \rho g z_A + \frac{1}{2}\rho v_A^2 = p_B + \rho g z_B + \frac{1}{2}\rho v_B^2 = p_C + \rho g z_C + \frac{1}{2}\rho v_C^2$$

$$z_A = z_B = z_C = 0$$

$$\Rightarrow \quad p_{atm} + \rho g z_{A'} + \frac{1}{2}\rho v_A^2 = p_{atm} + \rho g z_{B'} + \frac{1}{2}\rho v_B^2 = p_{atm} + \rho g z_{C'} + \frac{1}{2}\rho v_C^2$$

$$\Rightarrow \quad z_{A'} + \frac{1}{2}\frac{v_A^2}{g} = z_{B'} + \frac{1}{2}\frac{v_B^2}{g} = z_{C'} + \frac{1}{2}\frac{v_C^2}{g}$$

$$z_{A'} + \frac{1}{2}\frac{v_A^2}{g} = z_{B'} + \frac{1}{2}\frac{v_B^2}{g} = z_{C'} + \frac{1}{2}\frac{v_C^2}{g}$$

On sait par ailleurs que le débit volumique est conservé :

$$q_v = S_A v_A = S_B v_B = S_C v_C$$ *(en supposant la vitesse uniforme sur une même section)*

Remarquons que : $S_A > S_B$ *(rétrécissement)* $\Rightarrow$ $v_A < v_B$ *(accélération)* $\Rightarrow$ $z_{A'} > z_{B'}$ *(dépression)*

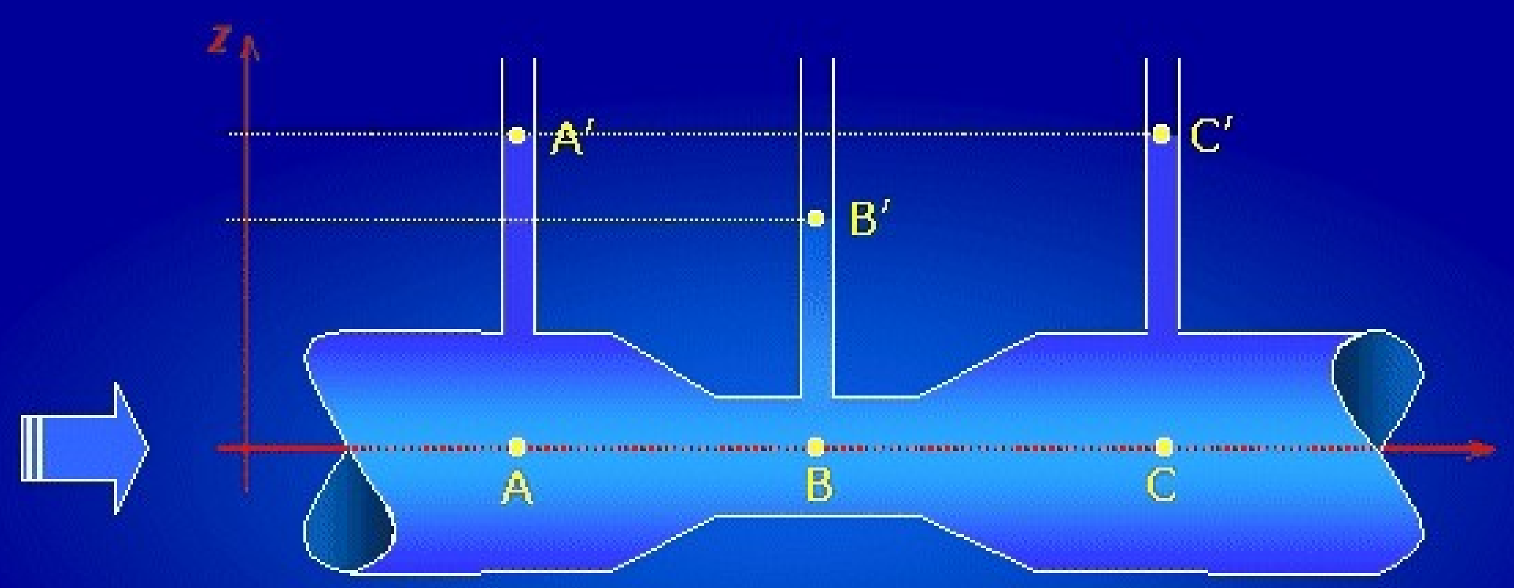
et que si $S_A = S_C$ alors $v_A = v_C$ et $z_{A'} = z_{C'}$: la 3ème sonde ne servira que pour une étude des pertes de charge (cf CH V)

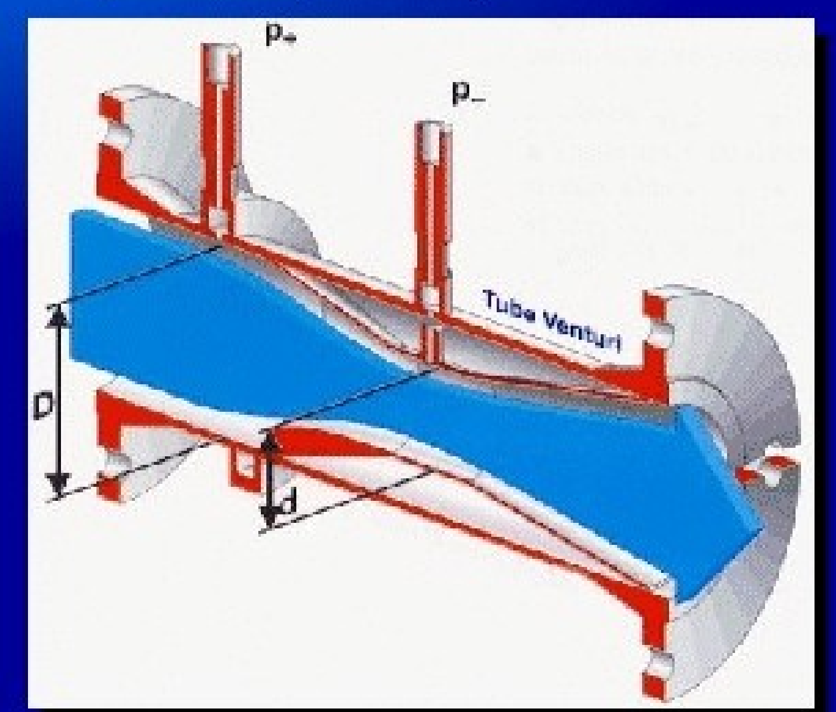
$$z_{A'} + \frac{1}{2}\frac{v_A^2}{g} = z_{B'} + \frac{1}{2}\frac{v_B^2}{g} \quad \Rightarrow \quad \Delta z = z_{A'} - z_{B'} = \frac{1}{2g}\left(v_B^2 - v_A^2\right)$$

$$S_A v_A = S_B v_B \quad \Rightarrow \quad v_B = v_A \frac{S_A}{S_B}$$

Donc : $\Delta z = \frac{1}{2g} v_A^2 \left(S_A^2 / S_B^2 - 1\right)$ soit : $v_A = \sqrt{\frac{2g\Delta z}{(S_A/S_B)^2 - 1}}$

Le débit dans la conduite s'obtient par : $q_v = S_A \sqrt{\frac{2g\Delta z}{(S_A/S_B)^2 - 1}}$



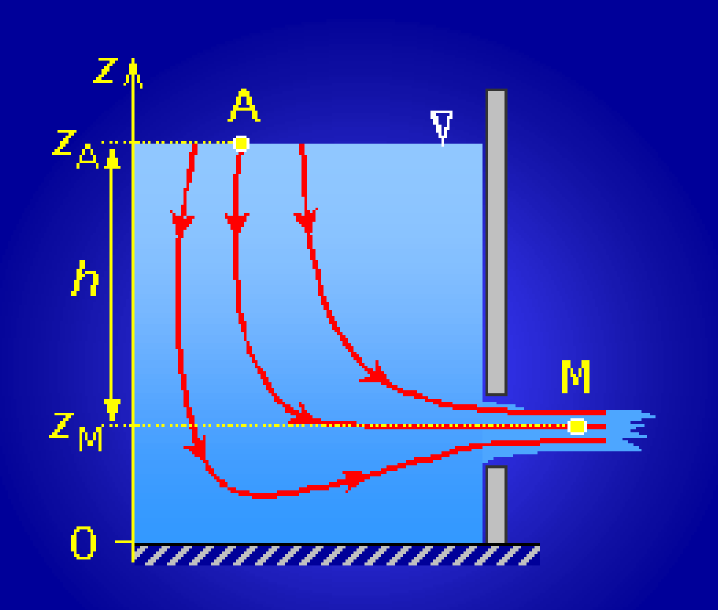


Exprimé en fonction du diamètre ***D*** de la conduite et du diamètre ***d*** du rétrécissement, le débit s'exprime :

$$q_v = \frac{\pi D^2}{4} \sqrt{\frac{2g\Delta z}{(D/d)^4 - 1}}$$

c) Ecoulement par orifice - Formule de *Torricelli*

Considérons la vidange d'un réservoir par un orifice placé sous la surface libre :



Appliquons *Bernoulli* entre un point A de la surface libre et un point M du jet :

$$p_A + \rho g z_A + \frac{1}{2}\rho v_A^2 = p_M + \rho g z_M + \frac{1}{2}\rho v_M^2$$

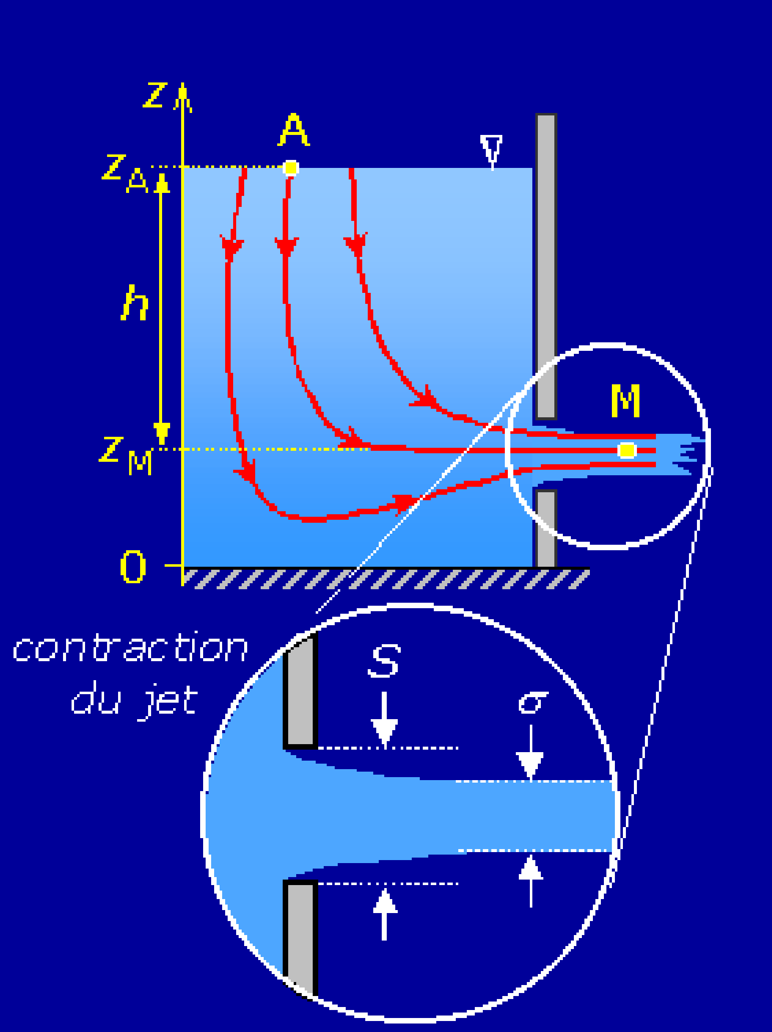
Hypothèse : dans le jet, les lignes de courant sont rectilignes parallèles, donc dans la direction transverse on peut y appliquer les lois de l'hydrostatique. Les variations d'altitude étant négligeables, ***la pression statique*** peut alors être considérée ***uniforme dans tout le jet***.

Comme il n'y a pas de discontinuité de pression à l'interface jet-atmosphère, ***la pression statique dans le jet est égale à la pression atmosphérique***.

Par conséquent : $p_A = p_M = p_{atm}$

$$\cancel{p_A} + \rho g z_A + \frac{1}{2}\rho v_A^2 = \cancel{p_M} + \rho g z_M + \frac{1}{2}\rho v_M^2$$

p_{atm} $\quad$ p_{atm} $\quad \Rightarrow \quad \rho g z_A + \frac{1}{2}\rho v_A^2 = \rho g z_M + \frac{1}{2}\rho v_M^2$



Hypothèse : la vitesse de descente du niveau de la surface libre peut être considérée négligeable devant celle du fluide s'écoulant dans le jet.

$$\Rightarrow \quad v_A \ll v_M$$

Par conséquent :

$$\rho g \underbrace{(z_A - z_M)}_{h} = \frac{1}{2}\rho(v_M^2 - v_A^2) \approx \frac{1}{2}\rho v_M^2$$

$$\Rightarrow \quad \boxed{v_M = \sqrt{2gh}}$$

formule de Torricelli

Calcul du débit :

$$q_v = \sigma v_M = \sigma\sqrt{2gh} \quad \text{où} \quad \sigma = C_c S$$

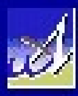
coefficient de contraction (C_c)

Le coefficient de contraction dépend de la géométrie de l'orifice.
De manière générale, C_c est déterminé expérimentalement et tabulé :

parois minces $C_c = 0{,}61$

orifice à bords profilés $C_c = 1{,}00$

orifice à bords rentrants $C_c = 0{,}50$



d) Phénomène de cavitation

Le phénomène de cavitation correspond à la ***formation de bulles de vapeur*** au sein d'un liquide en mouvement.

En conséquence de l'équation de *Bernoulli*, quand la vitesse augmente la pression diminue. Si pression tombe en dessous de la ***pression de vapeur saturante***, alors le liquide s'évapore ⇒ formation de bulles.

En pratique, et dans la plupart des cas, ce phénomène est gênant. Par exemple :

- ¤ la cavitation est consommatrice d'énergie

  énergie consommée pour la formation des bulles (transition de phase) + contraintes

- ¤ la cavitation est à l'origine de la détérioration prématurée des hélices de navires

  Les bulles créées par cavitation migrent spontanément vers les zones où la pression du fluide est plus élevée : elles éclatent et le choc mécanique engendre des détériorations.